

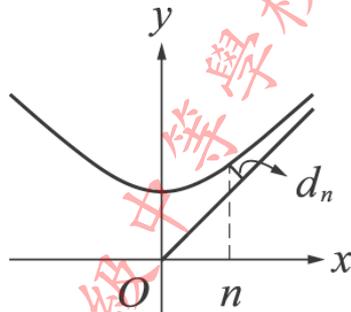
高雄市 113 學年度市立高級中等學校聯合教師甄選  
數學科試題卷

【※答案一律寫在答案本上】

一、計算證明題(1 至 7 題每題 4 分，8 至 16 題每題 8 分，共 100 分)

請寫下完整計算過程，否則不予計分。

1. 雙曲線  $y^2 - 4x^2 = 1$  圖形的上半部 (如圖一)，此雙曲線上  $x$  坐標為  $n$  的點與漸近線  $y = 2x$  的距離，記為  $d_n$ ，其中  $n$  為正整數。則  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot d_n) = \underline{\hspace{2cm}}$



圖一

2. 實係數方程式  $3x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$  有一實根  $\alpha$ ，與兩虛根  $\beta$ 、 $\beta^2 + 1$ ，求數對  $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$
3. 設  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ，若  $x + y + z = 3$ ，且  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ，則  $x + y - 2z$  的最大值為  $M$ ，最小值為  $m$ ，求數對  $(M, m) = \underline{\hspace{2cm}}$

4.  $(1 + \frac{1}{x})^{x+1} = (1 + \frac{1}{2024})^{2024}$  , 求  $x =$  \_\_\_\_\_

5. 坐標平面上兩點  $A(-5,4)$  ,  $B(6,9)$  ,  $O$  為原點 , 在  $\overrightarrow{OA}$  ,  $\overrightarrow{OB}$  射線上各取一點  $C$  ,  $D$  , 使  $\Delta OAB$  面積與  $\Delta OCD$  面積相等 , 且  $\overline{CD}$  線段平行  $x$  軸 , 求  $\overline{CD}$  線段長為 \_\_\_\_\_

6. 設  $m$  為實數 , 已知直線  $x + my = 0$  過定點  $A$  , 另一直線  $mx - y - m + 3 = 0$  過定點  $B$  , 兩直線交於點  $P(x,y)$  , 則線段乘積  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  的最大值為 \_\_\_\_\_

7. 將橢圓  $\Gamma_1: x^2 + 2y^2 = 1$  以原點  $O$  為中心 , 依逆時針方向旋轉  $60^\circ$  , 可得橢圓  $\Gamma_2$  , 試問  $\Gamma_2$  的方程式 \_\_\_\_\_

8.  $L_1: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -3t \end{cases} (t \in R)$  ,  $L_2: \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 - 2s \\ z = -s \end{cases} (s \in R)$  設  $P(t, -t, -3t)$  在  $L_1$

上 ,  $Q, R$  為  $L_2$  的兩相異點 , 當  $\Delta PQR$  為正三角形時 , 試以  $t$  表示  $\Delta PQR$  的面積 = \_\_\_\_\_

9. 若  $\vec{a} = (-2, 2, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 3, 2)$ ,  $\vec{c} = (-2, 3, 1)$ , 則當  $|\vec{a} - s\vec{b} - t\vec{c}|$  有最小值時,  $(s, t) =$  \_\_\_\_\_

10. 一座標平面上,  $O$  為原點, 點  $A_1$ 、 $A_2$  在正向  $x$  軸上, 點  $B_1$ 、 $B_2$  在正向  $y$  軸上,  $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = 26$ ,  $\angle B_2A_2O = 2\angle B_1A_1O$ , 且  $\Delta B_2A_2O$  的面積為 120, 則  $\Delta B_1A_1O$  的面積為多少 \_\_\_\_\_

11. 將表示式  $(x+y+z)^{2024} + (x-y-z)^{2024}$  展開並合併同類項, 試問化簡後共有多少項 \_\_\_\_\_

12. 設  $a, b$  皆表實數, 且滿足  $\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 則  $\sin(a+b)$  之值為多少 \_\_\_\_\_

13. 在  $\Delta ABC$  中,  $\overline{AB} = 2$ ,  $\overline{BC} = 1$ ,  $\overline{CA} = \sqrt{3}$ , 分別在三邊  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  上分別各取一點  $D, E, F$ , 使得  $\Delta DEF$  為正三角形。設  $\angle FEC = \theta$ , 當  $\sin \theta$  為多少時,  $\Delta DEF$  周長最短 \_\_\_\_\_

14. 若連續自然數的數列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  滿足  $\log 2 + \log\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{a_2}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \log n$ ，則當此數列有最多項數為  $m$  項時，此自然數數列和  $S_m$  是多少\_\_\_\_\_

15. 設複數  $z$  滿足主幅角  $\text{Arg}(z + 3) = \frac{3}{4}\pi$ ，則  $\frac{1}{|z-3i|+|z+6|}$  的最大值是\_\_\_\_\_

16. 箱中有編號 1 號到 7 號的 7 顆大小相同的球，每次從箱中任取出一球，再放回箱中，重複取球  $n$  次，並記錄這  $n$  次取球的數字總和為  $S_n$ ，假設  $S_n$  除以 3 餘 1 的機率為  $P_n$ ，試求出  $P_n$  (以  $n$  表示)\_\_\_\_\_